MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES BOOLEANAS

H. Neto, N. Horta

MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES BOOLEANAS - 2

- **SUMÁRIO:**
  - **MINIMIZAÇÃO ALGÉBRICA**
  - **MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH**
    - **REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES DE N VARIÁVEIS**
      - QUADROS DE 2, 3 e 4 VARIÁVEIS
      - QUADROS DE N VARIÁVEIS
    - **AGRUPAMENTOS DE UNS E ZEROS**
      - EIXOS DE SIMETRIA
      - IMPLICANTES E IMPLICADOS
      - IMPLICANTES E IMPLICADOS PRIMOS
      - IMPLICANTES E IMPLICADOS PRIMOS ESSENCIAIS
    - **MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH**
      - ALGORITMO DE MINIMIZAÇÃO
      - FORMA NORMAL/MÍNIMA DIJUNTIVA
      - FORMA NORMAL/MÍNIMA CONJUNTIVA
      - FUNÇÕES INCOMPLETAMENTE ESPECIFICADAS

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA PELO TEOREMA DA ADJACÊNCIA

Um termo com n literais tem n adjacentes possíveis

Exemplo

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

m_0 tem 3 adjacentes possíveis, mas apenas m_1 também vale 1.

$$m_0 = \bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1 \rightarrow \begin{cases} \bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1 = m_1 \\ \bar{x}_3.x_2.\bar{x}_1 = m_2 \\ x_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1 = m_4 \end{cases}$$

m_0 apenas pode ser simplificado com m_1.

$$m_0 + m_1 = \bar{x}_3.\bar{x}_2.(x_1 + \bar{x}_1) = \bar{x}_3.\bar{x}_2$$

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA PELO TEOREMA DA ADJACÊNCIA (cont.)

Exemplo

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

	adjacentes	
m_0	m_1	m_0 só pode ser simplificado com m_1
m_1	m_0 , m_3 , m_5	m_1 pode ser simplificado com m_0 ou com m_3 ou com m_5
m_3	m_1 , m_7	m_3 pode ser simplificado com m_1 ou com m_7
m_5	m_7	m_5 pode ser simplificado com m_1 ou com m_7
m_7	m_3 , m_5	m_7 pode ser simplificado com m_3 ou com m_5

SIMPLIFICAÇÃO ALGÉBRICA PELO TEOREMA DA ADJACÊNCIA (cont.)

Exemplo

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f = (m_0 + m_1) \quad \leftarrow \textbf{essencial}$$
$$+ (m_3 + m_7)$$
$$+ (m_1 + m_5)$$

$$f = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 + \left.\begin{matrix} x_2 \cdot x_1 \\ \bar{x}_2 \cdot x_1 \end{matrix}\right\} \textit{adjacentes}$$

$$f = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 + x_1$$

REORDENAÇÃO DA TABELA

Exemplo

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0

Os termos em linhas consecutivas diferem apenas de 1 bit.

Deste modo, grande parte dos termos adjacentes ficam representados em linhas contíguas, o que facilita a identificação de adjacências.

Não é habitualmente usada, porque se preferem os quadros a 2 dimensões.

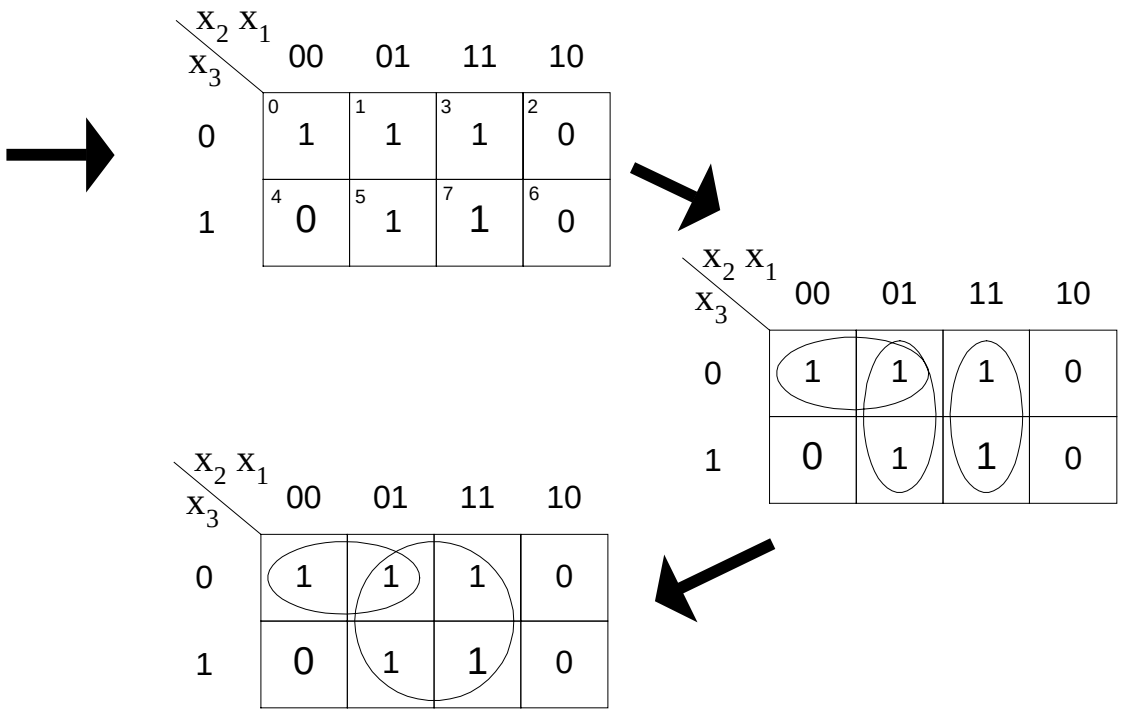
QUADRO DE KARNAUGH

Exemplo

Quadro de Karnaugh = Reordenação da tabela da verdade em 2 dimensões.

Os termos adjacentes ficam representados em linhas/colunas contíguas.

	x_3	x_2	x_1	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_3	0	1	1	1
m_2	0	1	0	0
m_6	1	1	0	0
m_7	1	1	1	1
m_5	1	0	1	1
m_4	1	0	0	0



IDENTIFICAÇÃO DOS TERMOS NO QUADRO DE KARNAUGH

Exemplo

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

O termo é 1 quando: x_3=0; e x_2=0; e x_1=0 ou x_1=1

ou seja: $\bar{x}_3.\bar{x}_2.\underbrace{(\bar{x}_1 + x_1)}_{simplificados} \rightarrow \bar{x}_3.\bar{x}_2$

x_3 \ $x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

O termo é 1 quando: x_3=0 ou x_3=1; e x_2=0 ou x_2=1; e x_1=1

ou seja: $\underbrace{((\bar{x}_3 + x_3).(\bar{x}_2 + x_2))}_{simplificados}.x_1 \rightarrow x_1$

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – QUADROS DE KARNAUGH

A representação de funções em **Quadros de Karnaugh** tem uma correspondência directa com a representação sob a forma de **Tabela de Verdade**.

Quadros de 2 Variáveis

f(X,Y)

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	$X\bar{Y}$	XY

X \ Y	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

Exemplos:

X	Y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$f(X,Y) = XY$
$= \Sigma m(3) = \Pi\, M(0,1,2)$

X \ Y	0	1
0	0	0
1	0	1

$f(X,Y) = X+Y$
$= \Sigma m(1,2,3) = \Pi\, M(0)$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)

Quadros de 3 Variáveis

f(X,Y,Z)

X \ YZ	00	01	11	10
0	$\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$	$\bar{X}\bar{Y}Z$	$\bar{X}YZ$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
1	$X\bar{Y}\bar{Z}$	$X\bar{Y}Z$	XYZ	$XY\bar{Z}$

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Exemplos:

$f(X,Y,Z) = \Sigma m(0,3,5,6)$

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)

Quadros de 4 Variáveis

A mesma função pode ter **representações diferentes, mas equivalentes**, num **Quadro de Karnaugh** pela simples alteração da localização das variáveis

f(W,X,Y,Z)

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

f(W,X,Y,Z)

YZ \ WX	00	01	11	10
00	m_0	m_4	m_{12}	m_8
01	m_1	m_5	m_{13}	m_9
11	m_3	m_7	m_{15}	m_{11}
10	m_2	m_6	m_{14}	m_{10}

REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES – Q. DE KARNAUGH (cont.)

Quadros de N Variáveis

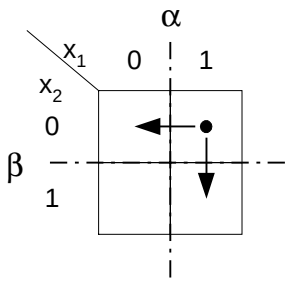
Um **Quadro de Karnaugh de N variáveis** é obtido pela **duplicação de quadro de N-1 variáveis** devendo ser acrescentada a N ésima variável e o correspondente **eixo de simetria** de modo a manter a representação das variáveis de forma reflectida.

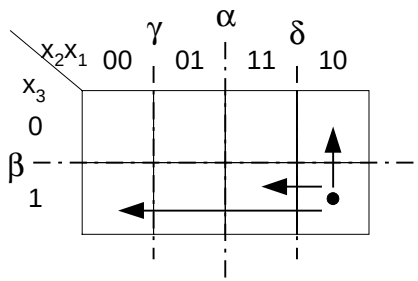
f(V,W,X,Y,Z)

V W \ XYZ	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

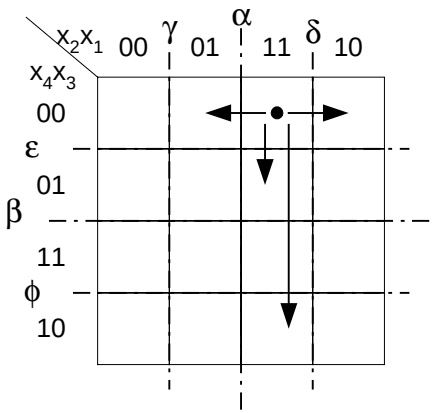
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS

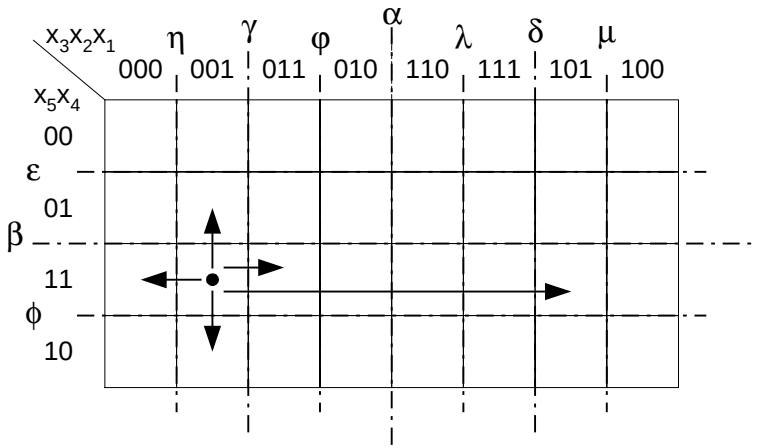
Eixos de Simetria





2 **quadrados** dizem-se **adjacentes** em termos lógicos quando apenas uma variável lógica altera o seu valor na representação desses quadrados.





Num quadro de N variáveis para cada quadrado existem, sempre, N outros adjacentes

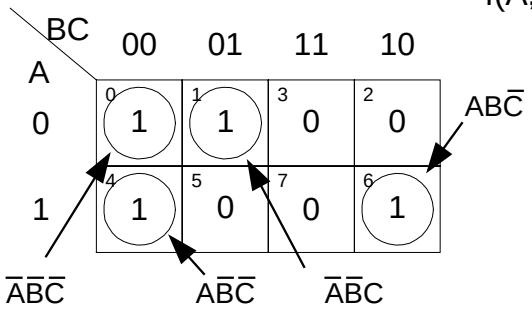
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

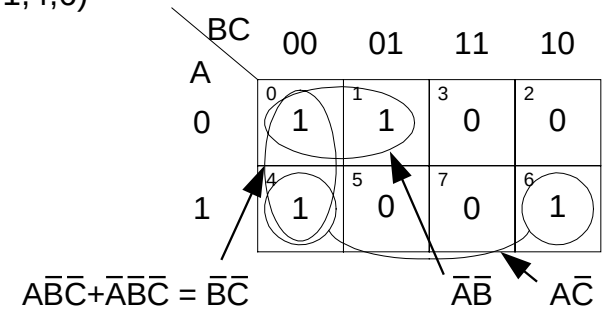
Implicante:

Um **termo de produto** diz-se um **implicante** de função sse essa função assume 1 para todos os mintermos que o constituem.

Exemplos:

$f(A,B,C) = \Sigma m(0,1,4,6)$

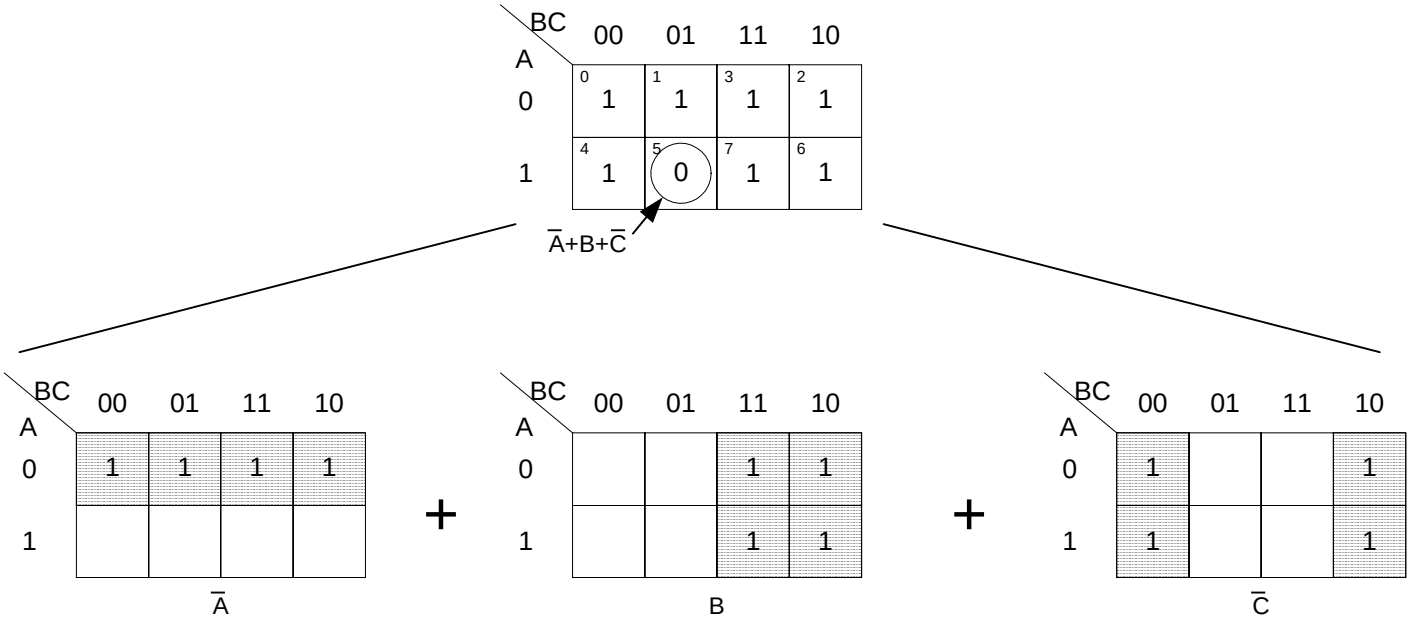




Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

Exemplos da Representação de Maxtermos:



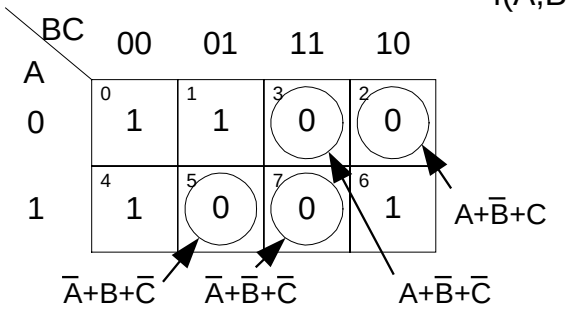
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

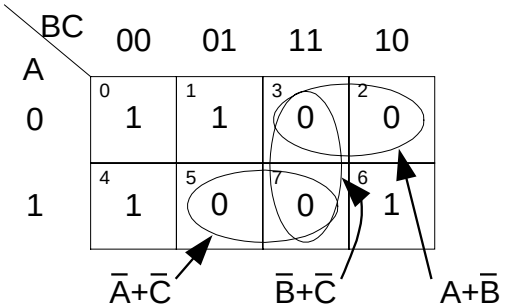
Implicado:

Um **termo de soma** diz-se um **implicado** de função sse essa função assume 0 para todos os maxtermos que o constituem.

Exemplos:

$f(A,B,C) = \Pi M(2,3,5,7)$



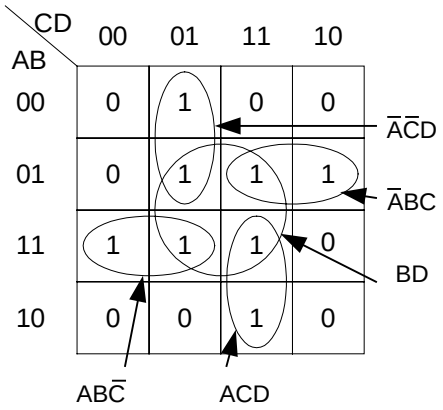


Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

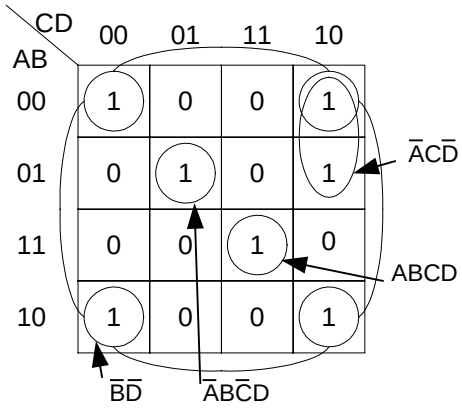
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

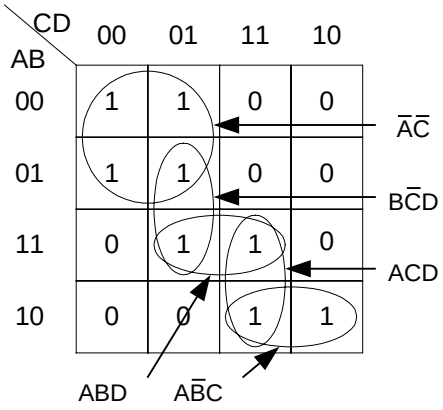
Implicante Primo:

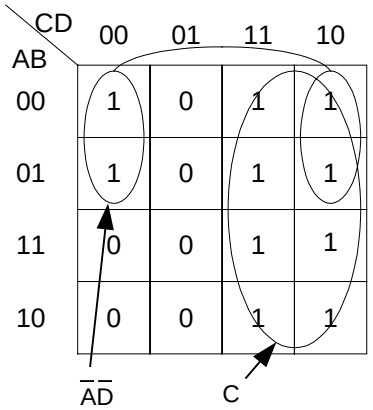
Um **termo de produto** diz-se um **implicante primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de produto, resulta num termo de produto que não é um implicante da função.



Exemplos:



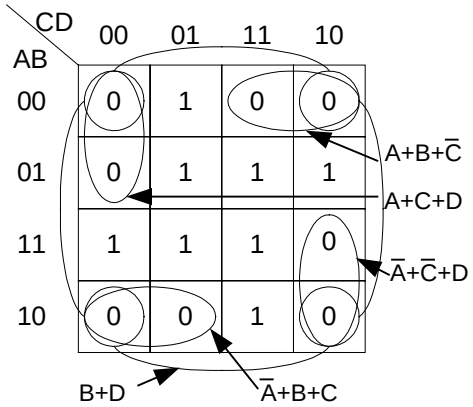




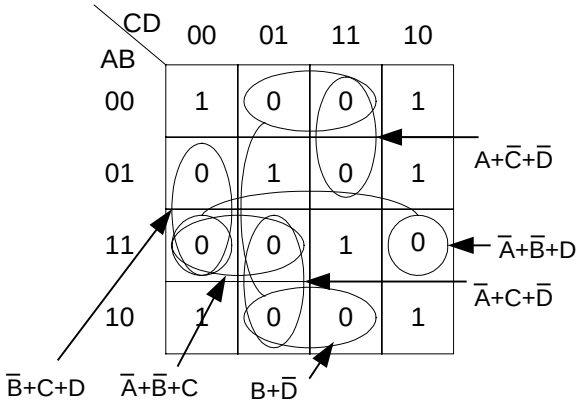
AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

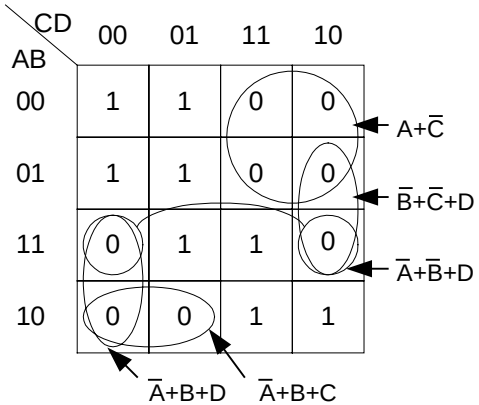
Implicado Primo:

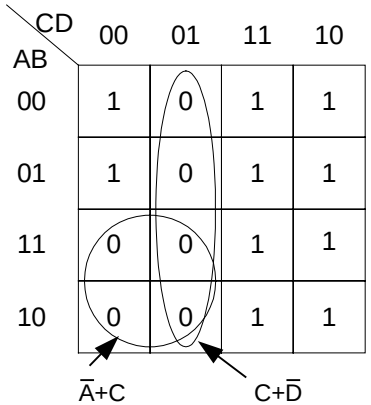
Um **termo de soma** diz-se um **implicado primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de produto, resulta num termo de soma que não é um implicado da função.



Exemplos:







AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

Implicante Primo Essencial:

Um implicante primo de uma função diz-se **implicante primo essencial** se **contém pelo menos um mintermo não contido em nenhum outro implicante primo**.

Exemplos:

Implicantes Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$\bar{A}\bar{C}D$

$\bar{A}BC$

BD

$AB\bar{C}$

ACD

Implicantes Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Implicantes Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Implicantes Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

Implicado Primo Essencial:

Um implicado primo de uma função diz-se **implicado primo essencial** se **contém pelo menos um maxtermo não contido em nenhum outro implicado primo**.

Exemplos:

Implicados Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$A+B+\overline{C}$

$A+C+D$

$\overline{A}+\overline{C}+D$

$B+D$

$\overline{A}+B+C$

Implicados Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

Implicados Primos

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

Implicados Primos Essenciais

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH

Algoritmo de Minimização:

O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh, corresponde à execução dos seguintes passos:

Passo 1: Identificação de todos os **implicantes/implicados primos essenciais**.

Passo 2: Determinação do **menor conjunto de implicantes/implicados primos** que contenham os mintermos/maxtermos não incluídos nos implicantes/implicados primos essenciais identificados no passo anterior.

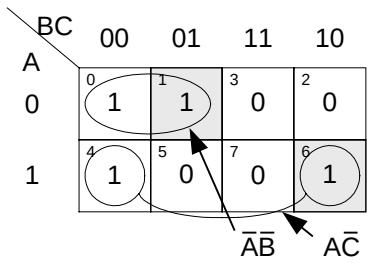
Passo 3: **Escrita da expressão simplificada** como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Forma Normal/Mínima Disjuntiva

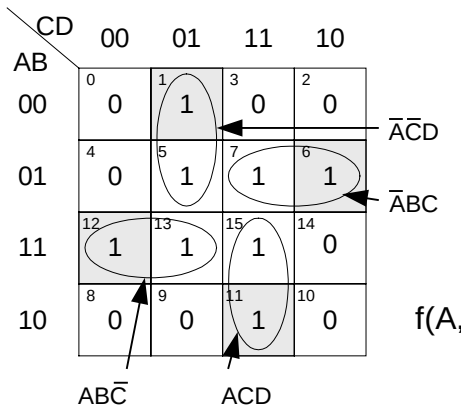
Exemplos:

Funções cuja simplificação utiliza apenas implicantes primos essenciais.



$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$

$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B} + A\bar{C}$



$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D}$
$+ AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + A\bar{B}CD$

$f(A,B,C,D) = AB\bar{C} + ACD + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{C}D$

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Forma Normal/Mínima Disjuntiva

Exemplos:

$f(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,5,7,10,14,15)$
$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD$
$+ A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} + ABCD$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 0	2: 0
01	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0
11	12: 0	13: 0	15: 1	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 0	2: 0
01	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0
11	12: 0	13: 0	15: 1	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 1

$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BD + ABC + AC\bar{D}$

Soluções alternativas

AB \ CD	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 0	2: 0
01	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0
11	12: 0	13: 0	15: 1	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 1

$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D + BCD + AC\bar{D}$

O conjunto de implicantes primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece várias alternativas.

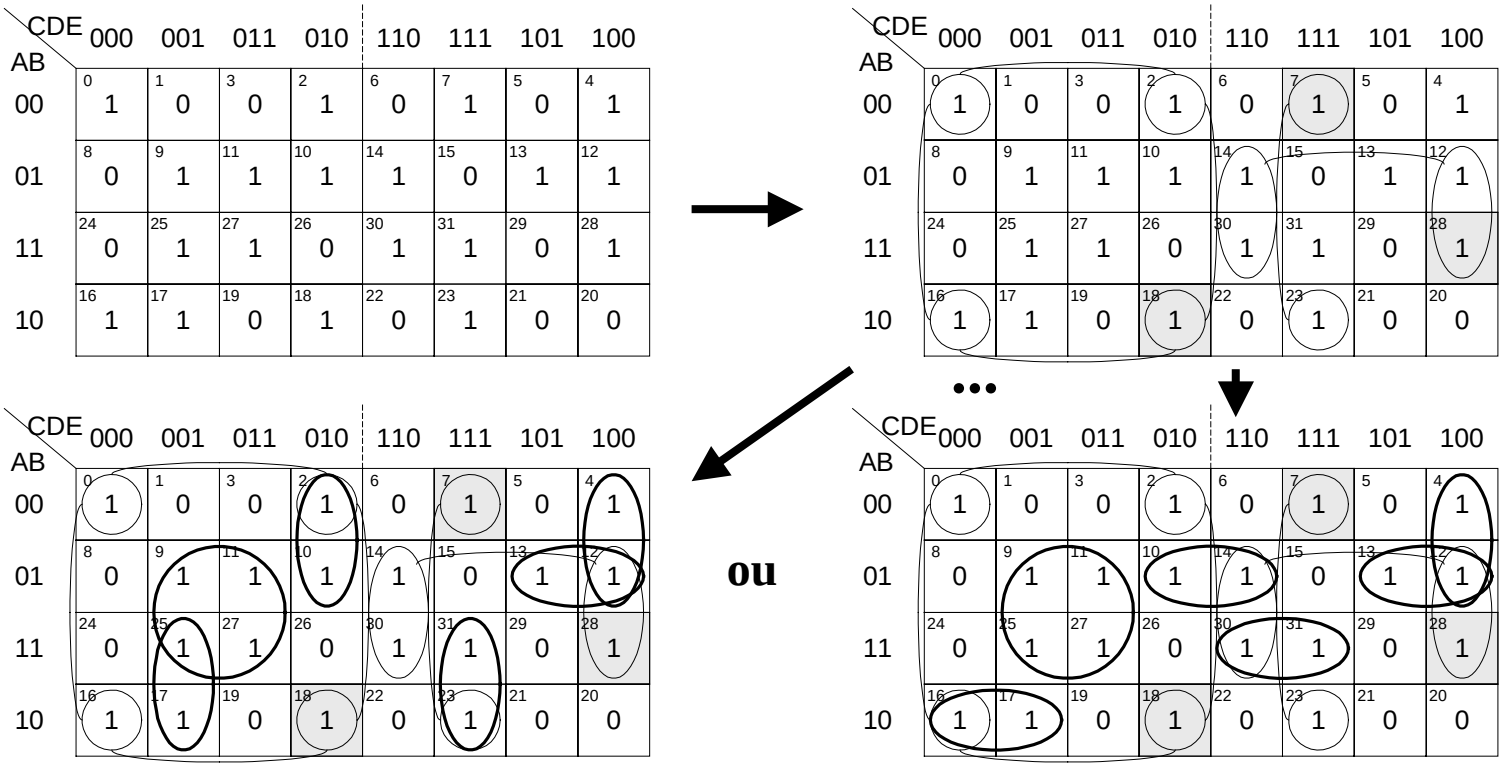
O conjunto de implicantes primos essenciais é único.

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

Expressão Original: 19 Termos de Produto de 5 Literais
Expressão Simplificada: 6 Termos de Produto de 4 Literais
3 Termos de Produto de 3 Literais

$f(A,B,C,D,E) = \Sigma m(0,2,4,7,9\text{-}14,16\text{-}18,23,25,27,28,30,31)$



MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Forma Normal/Mínima Conjuntiva

Exemplos:

$f(A,B,C,D) = \Pi M(2,3,4,6,8,9,11,12,13)$

$= (A+B+\bar{C}+D).\ (A+B+\bar{C}+\bar{D}).\ (A+\bar{B}+C+D).$
$(A+\bar{B}+\bar{C}+D).\ (\bar{A}+B+C+D).\ (\bar{A}+B+C+\bar{D}).$
$(\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D}).\ (\bar{A}+\bar{B}+C+D).\ (\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 0	2: 0
01	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0
11	12: 0	13: 0	15: 1	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 0	2: 0
01	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0
11	12: 0	13: 0	15: 1	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 1

$f(A,B,C,D) = (\bar{A}+C).(A+B+\bar{C}).(A+\bar{B}+D).(\bar{A}+B+\bar{D})$

Soluções alternativas

AB \ CD	00	01	11	10
00	0: 1	1: 1	3: 0	2: 0
01	4: 0	5: 1	7: 1	6: 0
11	12: 0	13: 0	15: 1	14: 1
10	8: 0	9: 0	11: 0	10: 1

$f(A,B,C,D) = (\bar{A}+C).(\bar{B}+C+D).(B+\bar{C}+\bar{D}).(A+\bar{C}+D)$

O conjunto de implicados primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece várias alternativas.

O conjunto de implicados primos essenciais é único.

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Algoritmo de Minimização (Funções Incompletamente Especificadas) :

O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh, corresponde execução dos seguintes passos:

Passo 1: Identificação de todos os **implicantes/implicados primos essenciais**. *

Passo 2: Determinação do **menor conjunto de implicantes/implicados primos** que contenham os mintermos/maxtermos não incluídos nos implicantes/implicados primos essenciais identificados no passo anterior. *

Passo 3: **Escrita da expressão simplificada** como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

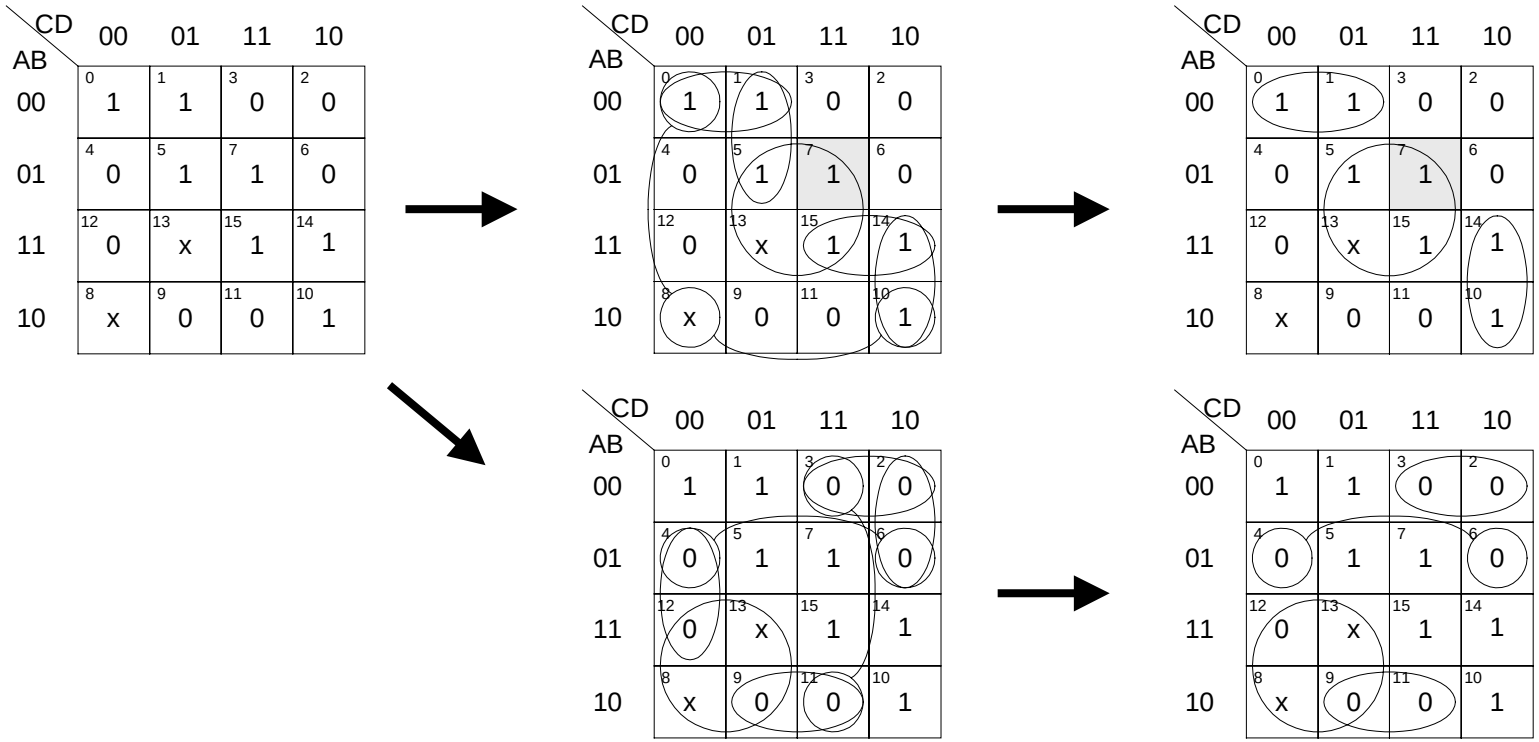
* Incluindo as indeterminações sempre que isso permita reduzir o número de literais presentes nesse implicante/implicado.

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Funções Incompletamente Especificadas

Exemplos:

$f(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,5,7,10,14,15)+\Sigma m_d(8,13)$
$=\Pi M(2,3,4,6,9,11,12).\Pi M_d(8,13)$



MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Funções Incompletamente Especificadas

Exemplos:

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0: x	1: 0	3: 0	2: 1	6: 0	7: 1	5: 0	4: 0
01	8: x	9: 1	11: 1	10: x	14: x	15: 1	13: x	12: x
11	24: 0	25: x	27: x	26: 0	30: 0	31: 1	29: x	28: 0
10	16: 1	17: 0	19: 0	18: 1	22: 0	23: 1	21: 0	20: 0

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0: x	1: 0	3: 0	2: 1	6: 0	7: 1	5: 0	4: 0
01	8: x	9: 1	11: 1	10: x	14: x	15: 1	13: x	12: x
11	24: 0	25: x	27: x	26: 0	30: 0	31: 1	29: x	28: 0
10	16: 1	17: 0	19: 0	18: 1	22: 0	23: 1	21: 0	20: 0

...

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0: x	1: 0	3: 0	2: 1	6: 0	7: 1	5: 0	4: 0
01	8: x	9: 1	11: 1	10: x	14: x	15: 1	13: x	12: x
11	24: 0	25: x	27: x	26: 0	30: 0	31: 1	29: x	28: 0
10	16: 1	17: 0	19: 0	18: 1	22: 0	23: 1	21: 0	20: 0

ou

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0: x	1: 0	3: 0	2: 1	6: 0	7: 1	5: 0	4: 0
01	8: x	9: 1	11: 1	10: x	14: x	15: 1	13: x	12: x
11	24: 0	25: x	27: x	26: 0	30: 0	31: 1	29: x	28: 0
10	16: 1	17: 0	19: 0	18: 1	22: 0	23: 1	21: 0	20: 0

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Morris Mano, Charles R. Kime, "Logic and Computer Design Fundamentals", Prentice-Hall International, Inc. (Capítulo 1, Secções 2.4-2.5)